Clase 20

Corriente y Resistencia

Potencia y energía

Al establecerse una corriente eléctrica en un circuito debe existir un equilibrio entre la energía que las fuentes de fuerza electromotriz aportan al circuito y la energía que se acumula o disipa en los componentes del mismo. Cuando una carga dq al atravesar un dispositivo de un circuito ve una diferencia de potencial ΔV su energía aumenta o disminuye en una cantidad $\Delta V dq$. El ritmo con que se suministra o retira energía del sistema en ese dispositivo es:

$$P = \Delta V \frac{dq}{dt} = \Delta V I$$

Por ejemplo en una resistencia tenemos $\Delta V = IR$ y $P = RI^2$. En una fuente de fuerza electromotriz ideal caracterizada por un potencial V tenemos $P = VI$. Si la fuente no es ideal y tiene una resistencia interna r_i la potencia que puede suministrar al circuito es $P = VI - r_i I^2$. En un condensador se acumula energía al ritmo $P = \frac{QI}{C}$.

Circuitos

Para determinar la magnitud y dirección de las corrientes I_i en los diferentes ramales del circuito, las cargas Q_j en los condensadores y el valor del potencial en cada punto usamos los siguientes hechos:

- El potencial aumenta al atravesar una fuente de fuerza electromotriz en el valor V que la caracteriza
- El potencial disminuye en un valor $-IR$ al atravesar una resistencia R en la dirección de la corriente
- El potencial disminuye en un valor Q/C al atravesar un capacitor desde su armadura positiva hacia su armadura negativa.

Para calcular las cantidades de interés en un circuito primeramente determinamos cuantas son las variables desconocidas y después utilizamos las leyes de Kirchhoff aplicadas a los distintos nodos y mallas del circuito para tener tantas ecuaciones independientes como incógnitas haya. Se debe tener cuidado al aplicar la ley de las mallas de no escribir ecuaciones redundantes. Una vez finalizado este proceso tendremos una ecuación matricial de la forma $Av = b$ donde v es un vector de n componentes si n es el número de incógnitas, A es la matriz $n \times n$ de los coeficientes de las ecuaciones y b es el vector de dimensión n vector formado por los términos independientes de las ecuaciones. Este sistema puede ser resuelto con cualquiera de las técnicas de reducción de matrices que se estudian en los cursos de álgebra lineal. Si el sistema no es muy grande puede ser conveniente usar la Regla de Cramer que escribe la solución en términos de los determinantes de la matriz A y de las matrices A_j resultantes de sustituir la columna j por el vector b de los términos independientes en la forma,

$$v_j = \frac{detA_j}{detA}$$

Recordemos que la condición necesaria y suficiente para que el sistema lineal $Av = b$ tenga solución única es que $detA \neq 0$.

Ejemplo 54: Resistencias en paralelo.

Para ilustrar el método a seguir consideremos un circuito muy simple de dos resistencias en paralelo R_1 y R_2 conectadas en paralelo alimentadas por una batería fuerza electromotriz V. Las incógnitas son la corriente I que pasa por la batería y las corrientes I_1 e I_2 que pasan por las resistencias. Aplicando la Ley de los nodos tenemos $I = I_1 + I_2$. Escogiendo las mallas que que pasan por la batería y por cada una de las resistencias, la ley de las mallas establece que $V - I_1R_1 = 0$ y $V - I_2R_2 = 0$. Estas ecuaciones se escriben matricialmente en la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V \\ V \end{pmatrix}$$

La solución para I podemos encontrarla con la regla de Cramer,

$$I = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ V & R_1 & 0 \\ V & 0 & R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{vmatrix}} = \frac{V(R_1 + R_2)}{R_1R_2}$$

Este resultado es por supuesto el mismo que se encuentra si calculamos la resistencia equivalente de las dos resistencias en paralelo como veremos en una próxima clase. De la misma manera tenemos por ejemplo para I_1

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & V & 0 \\ 0 & V & R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{vmatrix}} = \frac{V}{R_1}$$

Existe un método alternativo para escoger las variables que incorpora las ecuaciones provenientes de la ley de los nodos y reduce el tamaño del sistema de ecuaciones a resolver. Consiste en asignar una única corriente a cada malla cerrada y después determinar la corriente por cada resistencia en términos de esas corrientes. En ejemplo que estamos considerando podemos decir que por la malla cerrada donde está la batería y la resistencia R_1 circula una corriente I_A mientras que por la malla cerrada donde están las dos resistencia circula una corriente I_B. Escogiendo que ambas corrientes circulan en sentido horario tenemos que la corriente por R_1 es $I_A - I_B$ mientras que la corriente por R_2 es I_B. Utilizando dos veces la ley de las mallas tenemos las ecuación matricial,

$$\begin{pmatrix} R_1 & -R_1 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix}$$

cuya solución es

$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} V & 0 \\ V & R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{vmatrix}} = \frac{V}{R_1} \qquad I_B = \frac{V}{R_2}$$

en forma consistente con el resultado anterior.

Fuentes de fuerza electromotriz no ideales

Las fuentes de fuerza electromotriz al hacer trabajo sobre las cargas son afectadas por el circuito al que shan sido conectadas. Una forma sencilla de modelar esa interacción es asignarle a la fuente una resistencia interna. Entonces, cuando la corriente que pasa por la fuente crece la diferencia de potencial efectiva entre sus terminales disminuye en concordancia con lo que ocurre con las fuentes de fuerza electromotriz reales. Una fuente de fuerza electromotriz se acerca mas al comportamiento ideal cuando sus resistencia interna ses muy pequeña.